京都工繊対策 No.1

①　四面体 $A_1A_2A_3A_4$ の頂点から頂点に動く点Qがある．1つのさいころを投げ，出た目に応じてQは次のルールにしたがって動く．

ルール：さいころを投げる前，Qは A_k にあるとする．さいころを投げたとき，出た目 l が k，5，6のいずれにも等しくなければQは A_l に動き，l が k，5，6のいずれかに等しければQは A_k にとどまる．

最初Qは A_1 にあるとする．さいころを n 回投げたとき，Qが A_1 にある確率を p_n とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　p_1，p_2 を求めよ．

(2)　p_{n+1} を p_n の式で表せ．

(3)　p_n を求めよ．

②　2つの放物線 $C_1：y=\frac{1}{4}x^2$ と $C_2：y=-\frac{1}{4}(x-a)^2+b$ について，次の問いに答えよ．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．

(1)　放物線 C_1 の接線は適当な実数 m により $y=mx-m^2$ と表されることを示せ．

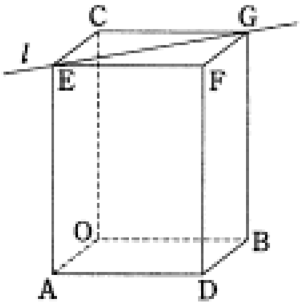
(2)　放物線 C_1 と C_2 の共通接線が2本あるための条件を求めよ．

(3)　放物線 C_1 と C_2 の共通接線が1本であるとき，放物線 C_1 と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし，共通接線と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする．V_1 と V_2 の比を求めよ．

③　右図の直方体OADB-CEFGにおいて，

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$　とおき，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$

とする．また，2点E，Gを通る直線を l とする．



(1)　$\overrightarrow{OE}$ と $\overrightarrow{EG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　Pを l 上の点とする．このとき，$\overrightarrow{OP}$ は実数 t を用いて

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OE}+t\overrightarrow{EG}$　と表される．次の問に答えよ．

(i)　$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{EG}$ となるとき，t の値を求めよ．

(ii)　△OEPが二等辺三角形となるとき，t の値をすべて求めよ．

④　$f(x)=\log x$ とおく．

(1)　定積分 $\int_1^e f(x)\,dx$ を求めよ．　(2)　定積分 $\int_1^e \{f(x)\}^2dx$ を求めよ．

(3)　点 $(e,\ f(e))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線 l の方程式を求めよ．

(4)　(3)で求めた接線 l，曲線 $y=f(x)$，および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ．

⑤　$\alpha=\frac{3+\sqrt{7}i}{2}$ とする．ただし，i は虚数単位である．次の問に答えよ．

(1)　α を解にもつような2次方程式 $x^2+px+q=0$ (p，q は実数) を求めよ．

(2)　整数 a，b，c を係数とする3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ について，解の1つは α であり，また $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に実数解を1つもつとする．このような整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ